

$J_n(n \epsilon)$	$\epsilon = 0,1$	$\epsilon = 0,2$	$\epsilon = 0,3$	$\epsilon = 0,4$	$\epsilon = 0,5$	$\epsilon = 0,6$
$J_1(\epsilon)$	0,0499375	0,0995008	0,1483188	0,1960266	0,2422684	0,2867010
$J_2(2 \epsilon)$	0,0049834	0,0197347	0,0436651	0,0758178	0,1149035	0,1593490
$J_3(3 \epsilon)$	0,0005593	0,0043997	0,0144340	0,0328743	0,0609640	0,0988020
$J_4(4 \epsilon)$	0,0000661	0,0010330	0,0050227	0,0149952	0,0339957	0,0643070
$J_5(5 \epsilon)$	0,0000081	0,0002498	0,0017994	0,0070396	0,0195016	0,0430284
$J_6(6 \epsilon)$	0,0000002	0,0000615	0,0006568	0,0033668	0,0113936	0,0293110

resultiert. Mit der Substitution $Z = 1 \pm \sqrt{1 - \xi^2}$ erhält man dann die singuläre Kurve der elliptischen Bewegung¹

$$\left(\frac{2}{Z} - 1\right) e^{2Z} = e^{2+2i\ell}$$

$\epsilon_1 = |\zeta_{\min}|$ der Singularitäten liefert den Konvergenzradius. Er ergibt sich aus

$$1 \mp \sqrt{1 + \epsilon_1^2} = -i \epsilon_1 e^{\mp \sqrt{1 + \epsilon_1^2} e^{i\ell}}$$

für $\zeta = \pm i \epsilon_1$ und für $\ell = \pi/2$ oder $\ell = 3\pi/2$, wobei das untere Vorzeichen für die gewöhnliche fokale Keplersche Gleichung ($\ell = \pi/2$) gilt. Die Wurzeln beider Gleichungen führen auf denselben absoluten Betrag

$$|\epsilon_1| = 0,6627\dots,$$

das heißt auf die Laplace-Tisserandsche Konvergenzschranke für die Entwicklung (1). Diese Schranke ergibt sich auch aus dem von CARLINI² mittels der Stirlingschen Formel für $J_n(n \epsilon)$ abgeleiteten Ausdruck

$$\frac{2}{n} J_n(n \epsilon) \sim \frac{e^n e^{n\sqrt{1-\epsilon^2}}}{\sqrt{\pi/2} n^{3/2} (1 - \epsilon^2)^{1/2} (1 + \sqrt{1 - \epsilon^2})^n},$$

indem man das d'Alembertsche Konvergenzkriterium anwendet.

Aus der Definition der Koeffizienten der Lagrange-Besselschen Entwicklung

$$J_n(n \epsilon) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} (-1)^\kappa \frac{n^{n+2\kappa}}{(n+\kappa)! \kappa!} \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{n+2\kappa}$$

sowie aus dem Ausdruck von CARLINI folgt, daß stets für $0 < \epsilon < \epsilon_1$

$$J_n(n \epsilon) > J_{n+1}[(n+1) \epsilon] > 0$$

gilt. Wenn man also die Restglieder der fokalen und der antifokalen Entwicklung miteinander vergleicht, so läßt sich ein erster roher Vergleich der Schnelligkeit der Konvergenz beider Entwicklungen gewinnen. Ist

$$R_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n+i} J_{n+i}[(n+i) \epsilon]$$

und für die antifokale Anomalie

$$R_2 = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{n+i} J_{n+i}[(n+i) \epsilon],$$

so ergibt sich als erste Schätzung für den Abbruch der Entwicklung (1) beim n -ten Glied

¹ C. L. CHARLIER, *Die Mechanik des Himmels*, Bd. II (1907), S. 263.

² *Ricerche sulla convergenza della serie che serve alla soluzione del problema di Keplero* (Milano 1817) [deutsche Übersetzung von C. G. JACOBI, Astron. Nachr. 30 (1850) = Werke, VII (1891), S. 189].

$$R_1 - R_2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n+2i} J_{n+2i}[(n+2i) \epsilon]. \quad (3)$$

Sie zeigt an Hand der Tabelle I dem praktischen Rechner¹, daß erst für relativ große Exzentrizitäten $\epsilon > 0,2$ die schnellere Konvergenz der antifokalen elliptischen Bewegung erheblich ins Gewicht fällt.

J. O. FLECKENSTEIN

Astronomisch-Meteorologische Anstalt der Universität Basel, den 3. März 1951.

Summary

Since the introduction of the antifocal anomaly changes the Langrange development of Kepler's equation progressing according to Bessel's functions $J_n(ne)$ into an alternating series, the antifocal development converges more quickly than usual. It has the same convergence radius as this; it represents a second root of the Laplace condition.

¹ Gerechnet mit der Rekursionsformel

$$J_{\nu+1}(x) = (2 \nu/x) J_\nu(x) - J_{\nu-1}(x)$$

nach der Tafel IV aus G. N. WATSON, *A treatise on the theory of Bessel functions* (1944), S. 730.

Über die Gamowschen Windungen des Energietales

1. Unter der Bindungsenergie eines Atomkerns¹ versteht man den Energiebetrag, der frei wird, wenn seine Bestandteile (Neutronen und Protonen) zum Kern zusammengefügt werden. Auf Grund des Tröpfchenmodells kann man bekanntlich eine Gleichung hiefür aufbauen. Stellt man die durch sie gegebene Abhängigkeit $E = f(N, Z)$ als Energiefläche dar², indem in einem räumlichen Koordinatensystem auf zwei Achsen die Zahl der Protonen und die Zahl der Neutronen und auf der dritten (senkrechten) Achse die Bindungsenergie aufgetragen wird (negativ, also nach unten aufgetragen, da sie für den Kern ein Defizit bedeutet), so erhält man eine Fläche von hyperbelartigem Querschnitt, deren tiefste Mulde von links vorne nach rechts hinten abfällt: das theoretische Energietal.

In der Sohle und an den Hängen dieses Tales liegen die natürlichen Kerne; und da der Kern um so stabiler ist, je größer die zu seiner Zerlegung aufzuwendende Arbeit ist, wächst die Stabilität mit der Bindungsenergie. Daher müssen die stabilsten Kerne in der Sohle des Tales, in der sogenannten «Energierinne», liegen. In der

¹ Siehe zum Beispiel W. HEISENBERG, *Physik der Atomkerne*, (3. Auflage).

² Abkürzungen: m = Massenzahl; Z = Ladungszahl; g = gerade; u = ungerade; N = Symbol für Neutron; P = Symbol für Proton.

beigefügten Abbildung ist die theoretische Lage dieser stabilsten Kernreihe durch die gestrichelte Kurve markiert.

2. In Wirklichkeit liegen die Dinge aber doch wesentlich anders: Die empirische Reihe der stabilsten Isotopen zeigt eine Anzahl von Windungen, die sich um die theoretische Kurve schlängeln. Als erster hat GAMOW¹ auf diesen Umstand aufmerksam gemacht. Er zeigte, daß der Wert N/Z als Funktion der Massenzahl (oder der Ladungszahl) eine gewundene Schlangenlinie ergibt, eine Erscheinung, die unter der Bezeichnung «Windungen des Energietales» in die kernphysikalische Literatur eingegangen und für viele Probleme von Wichtigkeit geworden ist (vgl. Fußnoten 2). Über die Zahl und die genaue Lage der Windungen bestand bei GAMOW keine Sicherheit (er gibt i.c. 7–8 Windungen an), und es war bis heute nicht möglich, über diesen Sachverhalt eine klar fundierte, einheitliche Auffassung zu erzielen.

3. Zur Ermittlung des faktischen Energietales eignen sich besonders gut die massenungeraden (m_u) Isotopen, weil ihr höchstens 2 Isotope (je Plejade) breites Band die Talsohle bekanntlich viel schärfer markiert als das breite Band der massengeraden (m_g) Isotopen, die nicht nur die Rinne, sondern zum Teil auch die Talhänge besetzen.

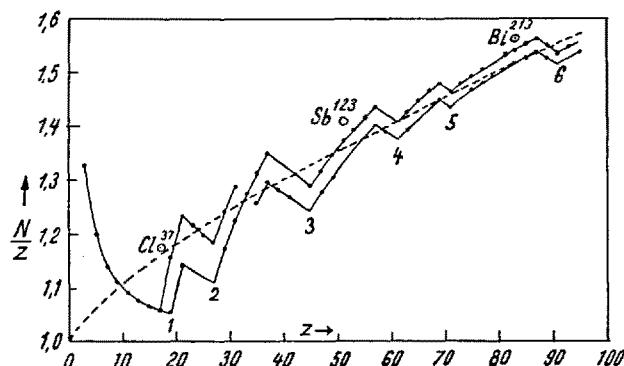


Abb. 1. – Die Windungen des Energietales.

Da, wie hier nicht näher auszuführen ist, für die m_u-Z_u einerseits und für die m_u-Z_g andererseits je ein separates Energietal besteht (wobei das erstere um $\Delta Z = +1$ und $\Delta m = +2$ phasenverschoben ist, im übrigen aber völlig gleichsinnig verläuft), wollen wir uns hier zunächst auf die m_u-Z_u -Gruppe beschränken. Für diese konnte der Verfasser kürzlich zeigen³, daß sie sich in einem geschlossenen System von hoher Gesetzmäßigkeit darstellen läßt, in welchem jede Plejade grundsätzlich durch zwei Isotope besetzt ist. Allerdings sind nicht alle Kerne dieser Systematik reelle Isotope: wegen des Isobarensatzes von MATTUAUCH⁴ müssen alle diejenigen Massenzahlen, die schon in der m_u-Z_g -Gruppe vertreten sind, in der m_u-Z_u -Gruppe ausfallen bzw. sie scheinen in dieser als «imaginäre Kerne» auf. Trotzdem bilden sie einen integralen Bestandteil des m_u-Z_u -Systems, weil erst durch ihre Einbeziehung die ausgezeichnete Gesetzmäßigkeit des Aufbaues der Kerne klar erkennbar wird.

Mit dieser Systematik ist die gestellte Frage eigentlich schon beantwortet. Es ist aber üblich, dieses Problem

an dem Kurvenverlauf des Wertes N/Z zu studieren, wie Abbildung 1 veranschaulicht.

Wie ersichtlich, besteht das Band der stabilsten m_u-Z_u aus einer Doppelreihe, deren N/Z -Wert sechs Minima, also ebenso viele Windungen, aufweist. RACAHs Vermutung¹, daß von den 7–8 Windungen, die GAMOW annahm, «einige bestimmt nicht existieren», bestätigt sich somit.

Da nach einer Regel von MATTUAUCH m_u Isotope nahezu gleich häufig sind², muß die Energierinne in der Mitte des Bandes verlaufen. Aber die Abweichungen von der Gleichhäufigkeitsregel, das Ausfallen der Isobaren und die Lage der Außenseiter Cl^{37} , Sb^{123} und Bi^{213} zeigen, daß dies nur im Durchschnitt zutrifft. Im einzelnen treten nochmals kleine Windungen (zweiter Ordnung) auf: *Das Tal besitzt außer den sechs großen Windungen noch eine Feinstruktur*, welche die Besetzung in den Einzelheiten beeinflußt. Die Ursache dieser Feinstruktur ist nach Lage der Dinge sicher eine andere als die der sechs großen Windungen. Möglicherweise spielen dabei die spinabhängigen Kernkräfte (vgl. NEUERT³) eine Rolle.

Die sechs großen Windungen sind im einzelnen:

Tabelle I

Windungszahl	1	2	3	4	5	6
Z-Bereich . . .	0–21	21–37	37–57	57–69	69–87	87–...

Jede Windung besteht aus einem abfallenden und einem ansteigenden Ast. In den abfallenden Phasen hält der Kern den Wert $I = N - Z$, in den ansteigenden den Wert $2Z - N$ konstant, eine Tatsache, an der die strukturtheoretische Deutung anknüpfen muß. In dieser Hinsicht ist interessant, daß die Länge der ansteigenden Abschnitte stets ein ganzes Vielfaches von $\Delta Z = 4$ beträgt:

Tabelle II
Z-Bereich der ansteigenden Äste der Windungen

Windungs- zahl	1	2	3	4	5	6
Z-Bereich. ΔZ . . .	17–21 4 $= 1 \cdot 4$	27–37 8+2 $= 2 \cdot 4 (+2)$	45–57 12 $= 3 \cdot 4$	61–69 8 $= 2 \cdot 4$	71–87 16 $= 4 \cdot 4$	91–? ? $= x \cdot 4$

Bei der zweiten Windung erstreckt sich der betreffende Abschnitt zwar über einen Bereich von $\Delta Z = 10$; dies ist aber nur eine scheinbare Ausnahme von der Regel: Die eigenartige Parallelverschiebung des Bandes bei $Z = 33$ verursacht einen «Mehrverbrauch» von $\Delta Z = 2$, der ansteigende Abschnitt an sich ist $\Delta Z = 8$ lang.

Über die strukturtheoretische Deutung dieser Systematik (Bildung von N_8P_4 -Bausteinen im Kern) vgl. Fußnote 4.

O. MONECKE

Tyrolitwerke, Wattens im Tirol, 1. Februar 1951.

¹ G. GAMOW, Z. Phys. 89, 592 (1934).

² J. SCHINTLMEISTER, Öster. Chem. Z. 41, 315 (1938). – A. J. DEMPSTER, Phys. Rev. 53, 869 (1938). – K. STRUT, Acta Phys. Austr. 2, 1 (1949). – H. E. SUÈSS, Z. Naturf. 2a, 311, 604 (1947).

³ O. MONECKE, Exper. 5, 440 (1949).

⁴ J. MATTUAUCH, Z. Phys. 91, 361 (1934).

¹ G. RACAH, Z. Phys. 93, 704 (1935).

² J. MATTUAUCH-FLÜGGE, *Kernphysikalische Tabellen* (1942), S. 92.

³ H. NEUERT, Z. Naturf. 3a, 152 (1948).

⁴ O. MONECKE, Exper. 5, 440 (1949).

Summary

The question of the Gamow convolutions of the regions of low energy is treated with the aid of the isotope system developed by the author. Six exactly delimited convolutions result, upon which a fine structure is superimposed (convolutions of the second order).

Über die Wirkung von Metallionen auf die tuberkulostatische Aktivität des Oxins und der PAS

Aus früher mitgeteilten Versuchen¹ ging hervor, daß Cu⁺⁺ die bakteriostatische Wirkung von Verbindungen, die auf Grund ihrer Struktur als Komplexbildner aufzufassen sind, erheblich verstärken kann. Der Wirkungsmechanismus scheint nicht für alle in ihrer Aktivität von Cu⁺⁺ beeinflußten Verbindungen der gleiche zu sein.

Wir berichten im folgenden über eine Reihe von Versuchen mit Tbc-Kulturen, die zur weiteren Aufklärung dieser Wechselwirkungen durchgeführt wurden.

Die verstärkende Wirkung der Cu⁺⁺ auf die Aktivität des Oxins ist bei Versuchen mit Oberflächenkulturen, zum Beispiel im Lockemann-Milieu, sehr ausgeprägt und tritt aber auch nicht so deutlich auf bei in der Tiefe, zum Beispiel im Kirchner-Milieu, wachsenden Kulturen (Tabelle I).

Tabelle I

Hemmung von Oxin auf Tbc-Kulturen in Gegenwart von Metallionen

Nährösung	Metallionenzusatz	Total hemmende Grenzkonzentration mol/L
Lockemann-Oberflächenkultur	–	m/ 50 000
Lockemann-Oberflächenkultur	Cu ⁺⁺ m/20 000	m/300 000
Kirchner-Nährösung . . .	–	m/100 000
Kirchner-Nährösung . . .	Cu ⁺⁺ m/20 000	m/200 000
Lockemann-Oberflächenkultur	Co ⁺⁺ m/1000	m/ 5 000
Lockemann-Oberflächenkultur	Vitamin B ₁₂ (1γ/cm ³)	m/ 50 000

Anders als durch Cu⁺⁺ wird die Wirkung des Oxins auf Oberflächenkulturen durch Co⁺⁺ beeinflußt. So bewirkt ein Zusatz von Co⁺⁺ zum Beispiel in einer Konzentration von m/1000 eine deutliche Schwächung der Oxinwirkung. Entsprechende Versuche mit Vitamin B₁₂ ergaben keine eindeutige Schwächung der Oxinwirkung² (Tab. I). Auf der anderen Seite fanden wir, daß in der Kulturflüssigkeit von *Mycobacterium tuberculosis*, Stamm H₃₇R_v, ein die Vitamin-B₁₂-Wirkung besitzendes Prinzip vorhanden ist. Der Nachweis gelang auf biologischem Wege mit *Lactobacillus lactis* als Testobjekt. In gleicher Weise konnte aus den Tbc-Kulturen selbst ein in diesem Test die Vitamin-B₁₂-Wirkung zeigendes Material isoliert werden.

¹ E. SORKIN, W. ROTH und H. ERLENMEYER, Exper. 7, 64 (1951). – E. SORKIN und W. ROTH, Helv. chim. acta 34, 427 (1951). – W. ROTH, F. ZUBER, E. SORKIN und H. ERLENMEYER, Helv. chim. acta 34, 430 (1951).

² Auch bei *Staph. aureus*, wo Co⁺⁺ deutlich die Oxin-Kupfer-Wirkung enthemmt [S. D. RUBBO, A. ALBERT und N. I. GIBSON, Brit. J. exp. Pathol. 31, 425 (1950)], erhielten wir mit Vitamin B₁₂ keine der Wirkung der Co⁺⁺ entsprechende Beeinflussung; siehe auch W. SCHULER und R. MEIER, Schweiz. Z. Path. Bakt. 13, 463 (1950).

Aus den bisherigen Versuchen ist einerseits zu entnehmen, daß Cu⁺⁺ durch die Gegenwart von Oxin wirksam wird, und andererseits konnte bei Kulturen von *Staph. aureus* von RUBBO, ALBERT und GIBSON¹ gezeigt werden – und wir haben ähnliche Verhältnisse bei Tbc-Kulturen mit oxinähnlichen Verbindungen ermittelt –, daß Oxin seine Wirksamkeit nur in Gegenwart von Cu⁺⁺ entfalten kann. Die Versuche mit Co⁺⁺ lassen es möglich erscheinen, daß ein Cu⁺⁺-Co⁺⁺-Antagonismus an dem Wirkungsmechanismus des Oxins und oxinähnlicher Verbindungen beteiligt ist.

Sind Co⁺⁺ und Cu⁺⁺ gleichzeitig vorhanden, so kommt eine verstärkende Wirkung des Cu⁺⁺ trotz der Anwesenheit von Co⁺⁺ noch abgeschwächt zur Auswirkung (Tabelle II).

Tabelle II

Nährösung	Metallionenzusatz	Total hemmende Grenzkonzentration mol/L
Lockemann-Oberflächenkultur	Cu ⁺⁺ m/20 000 + Co ⁺⁺ m/ 1 000	m/100 000
Lockemann-Oberflächenkultur	Cu ⁺⁺ m/20 000 + Co ⁺⁺ m/20 000	m/300 000

Ganz anders liegen die Verhältnisse bei der PAS, die durch Cu⁺⁺ nicht in ihrer Wirkung auf Oberflächenkulturen, sondern nur in ihrer Wirkung auf Kulturen in Kirchner-Milieu verstärkt wird. Die Aktivität der PAS wird unter diesen Bedingungen auch nicht durch Co⁺⁺ und ebensowenig durch Vitamin B₁₂ geschwächt. Die Cu⁺⁺-Wirkung wird durch Co⁺⁺ gleichfalls nicht beeinflußt. Hingegen wird die Wirkung der PAS auch in Gegenwart von Cu⁺⁺ durch PAB aufgehoben (Tabelle III).

Tabelle III

Nährösung	Metallionenzusatz	Total hemmende Grenzkonzentration mol/L
Lockemann-Oberflächenkultur	–	m/ 50 000
Lockemann-Oberflächenkultur	Cu ⁺⁺ m/5 000	m/ 50 000
–	–	m/ 40 000
–	Cu ⁺⁺ m/5 000	m/500 000
–	Co ⁺⁺ m/1 000	m/ 40 000
Kirchner-Nährösung	Vit. B ₁₂ (1γ/cm ³)	m/ 40 000
–	Cu ⁺⁺ m/5 000	m/500 000
–	+ Co ⁺⁺ m/5 000	m/ 40 000
–	Cu ⁺⁺ m/5 000	m/500 000
–	+ Vit. B ₁₂ (1γ/cm ³)	m/500 000
–	PABm/20 000	m/ 1 000
–	PABm/20 000	m/ 1 000
–	+ Cu ⁺⁺ m/5 000	m/ 1 000

Erwähnt sei noch, daß die schwache tuberkulostatische Wirkung der Salicylsäure in keiner Versuchsanordnung durch Cu⁺⁺ beeinflußt werden konnte.

E. SORKIN, W. ROTH, V. KOCHER und H. ERLENMEYER

Anstalt für anorganische Chemie der Universität Basel, Hygienische Anstalt der Universität Basel, Mikrobiologisches Laboratorium St. Jakob, Basel, den 15. März 1951.

¹ L. c.